

(7 pages)

S.No. 2258

17UMA01

(For the candidates admitted from 2017-2018 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2017.

First Semester

Mathematics

CLASSICAL ALGEBRA

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

PART A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Prove that $1 + \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \dots = 2e$.

$$1 + \frac{2}{1!} + \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} + \dots = 2e \text{ என நிருவு.}$$

2. Prove that

$$(1+x)^n = 2^n \left[1 - \frac{n(1-x)}{1+x} + \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 + \dots \right]$$

$$(1+x)^n = 2^n \left[1 - \frac{n(1-x)}{1+x} + \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 + \dots \right]$$

என நிருவு.

3. Show that 0 is the characteristic root of a matrix if and only if, the matrix is singular.

0 ஆனது ஒரு அணியின் சிறப்பியல்பு மூலம் எனில் எனில் மட்டுமே அவ்வணி ஒரு அருநிலை அணி எனக் காட்டு.

4. Write the condition for the system of equations $AX = B$ to be consistent.

$AX = B$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு இசைவுடையதாக இருப்பதற்கான நிபந்தனையை எழுது.

5. Find the sum and product of the roots of the equation $x^{100} + x^{98} + x^{96} + \dots + x^2 = 0$.

$x^{100} + x^{98} + x^{96} + \dots + x^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூடுதல் மட்டும் பெருக்கல் ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. Show that $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ is a root of $x^4 = 16x^2 + 4 = 0$.

$\sqrt{5} + \sqrt{3}$ என்பது $x^4 = 16x^2 + 4 = 0$ -ன் ஒரு மூலம் எனக் காட்டு.

7. Define reciprocal equation.

தலைகீழ் சமன்பாடு - வரையறு.

8. How do you remove the second term of the equation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$?

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரண்டாவது உறுப்பை எவ்வாறு நீக்குவாய்?

9. Show that $x^9 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = 0$ has only one negative root.

$x^9 + x^5 + x^4 + x^2 + 1 = 0$ ஒரே ஒரு குறை மூலம் கொண்டது எனக் காட்டு.

10. Write Newton's iteration formula in evaluating real root of an equation.

ஒரு சமன்பாட்டின் மெய் மூலத்தை மதிப்பிடுவதற்கான நியூட்டனின் மீள்வரும் சூத்திரத்தை எழுது.

PART B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) If $p-q$ is small compared to p or q show that
- $$\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{(n+1)p + (n-1)q}{(n-1)p + (n+1)q}$$

p மற்றும் q -உடன் ஒப்பிடுகையில் $p-q$ சிறியது எனில் $\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{(n+1)p + (n-1)q}{(n-1)p + (n+1)q}$ எனக் காட்டு.

Or

- (b) Find the sum $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$.

கூடுதல் காண்க $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$.

12. (a) Solve the system of equations
 $x + 2y - z = 3; 3x - y + 2z = 1;$

$$2x - 2y + 3z = 2; x - y + z = -1.$$

$$x + 2y - z = 3; 3x - y + 2z = 1;$$

$$2x - 2y + 3z = 2; x - y + z = -1.$$

என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்.

Or

- (b) Prove that the characteristic roots of a Hermitian matrix are real.

ஹெர்மிஷியன் அணியின் சிறப்பியல்பு மூலங்கள் மெய்மூலங்கள் என நிருவு.

13. (a) Solve the equation

$x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 36x - 36 = 0$ given that the product of two of its roots is equal in magnitude but opposite in sign of the product of other two roots of it.

$x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 36x - 36 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களின் பெருக்கல் மற்ற இரு மூலங்களின் பெருக்கலுக்கு எண்ணளவில் சமம் மற்றும் குறியளவில் எதிர்க்குறி உடையது எனில் சமன்பாட்டைத் தீர்.

Or

- (b) If $f(x) = 0$ is a polynomial equation with rational coefficients, then show that irrational roots occur in pairs.

$f(x) = 0$ என்பது விகிதமுறுக்கெழுக்கள் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் விகிதமுறா மூலங்கள் இணைச் சோடி மூலங்களாக அமையும் எனக் காட்டு.

14. (a) Increase the roots the equation $x^4 + 16x^3 + 83x^2 + 152x + 84 = 0$ by 4 and hence solve it.

$x^4 + 16x^3 + 83x^2 + 152x + 84 = 0$ -ன் மூலங்களை 4 உயர்த்துவதன் மூலம் சமன்பாட்டைத் தீர்.

Or

- (b) If α is a root of the equation $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, then show that $\alpha^2 - 2$ is also a root of it.

α என்பது $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ -ன் ஒரு மூலம் எனில் $\alpha^2 - 2$ -ம் அதன் ஒரு மூலம் என நிரூப.

15. (a) Discuss the nature of roots of the equation $x^4 + 2x^2 + 3x - \alpha = 0$, $\alpha > 0$.

$x^4 + 2x^2 + 3x - \alpha = 0$, $\alpha > 0$ -ன் மூலங்களின் இயல்பை ஆராய்க.

Or

- (b) Find by Newton's method, the negative root of the equation $x^3 - 21x + 35 = 0$.

$x^3 - 21x + 35 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் குறை மூலத்தை நியூட்டன் முறையில் காண்க.

PART C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Sum to infinity the series $1 + \frac{2^3 x}{1!} + \frac{3^3 x^2}{2!} + \dots$

$1 + \frac{2^3 x}{1!} + \frac{3^3 x^2}{2!} + \dots$ என்ற தொடரின் கூடுதலை கந்தழி வரை காண்.

17. Verify Caley-Hamilton theorem for the matrix

$\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ and hence find its inverse.

$\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு கேலிஹேமில்டன்

தேற்றத்தை சரிபார்த்து அதன் நேர்மாறு அணியைக் காண்க.

18. Show that the roots of

$$\frac{a_1^2}{x - a_1} + \frac{a_2^2}{x - a_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x - a_n} = 1 \text{ are all real.}$$

$$\frac{a_1^2}{x - a_1} + \frac{a_2^2}{x - a_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x - a_n} = 1 \text{ -ன் மூலங்கள்}$$

அனைத்தும் மெய் மூலங்கள் எனக் காட்டு.

19. Solve the equation

$$6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0.$$

$$6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0 \text{ என்ற}$$

சமன்பாட்டைத் தீர்.

20. Find the positive root of the equation $x^3 + 24x - 50 = 0$ correct to two places, by Horner' method.

$x^3 + 24x - 50 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மிகை மூலத்தை இரு தசமத் திருத்தமாக ஹார்னர் முறையில் காண்க.