S.No. 2180

12UMAE01

(For the candidates admitted from 2012-2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2017.

Second Semester

Mathematics

Elective — VECTOR ANALYSIS

Time : Three hours — Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

1. Find the equation of the tangent plane at (1, 0, 2) in the surface $x^2y+2xz^2=8$.

   (1, 0, 2)ல் $x^2y+2xz^2=8$ என்ற சமதள பரப்பின் செங்குத்து கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

2. Find $\nabla\phi$, where $\phi=\frac{1}{2}$ by $(x^2+y^2+z^2)$ at (1, 1, 1)

   $\phi=\frac{1}{2}$ by $(x^2+y^2+z^2)$ல் (1, 1, 1) என்ற புள்ளியிடத்து $\nabla\phi$ ஐ காண்க.

3. Show that

$\overline{F} = (y^2 - z^2 + 3yz - 2x)\overline{i} + {*3xz} + 2xy)\overline{j} +$

$(3xy - 2xz + 2z)\overline{k}$

is solenoidal.

$\overline{F} = (y^2 - z^2 + 3yz - 2x)\overline{i} + {*3xz} + 2xy)\overline{j} +$

$(3xy - 2xz + 2z)\overline{k}$

என்பது ஒரு பாய்வற்ற வெக்டார் எனக் காட்டு.

4. If $\overline{F} = xz^3\overline{i} - 2xy\overline{j} + xz\overline{k}$, find $curl\,\overline{F}$ at (1, 1, 1).

$\overline{F} = xz^3\overline{i} - 2xy\overline{j} + xz\overline{k}$ எனில் (1, 1, 1) என்ற புள்ளியிடத்து $curl\,\overline{F}$ ஐ காண்க.

5. If ϕ is a scalar point function, find $curl(grad\ \phi)$.

ϕ என்பது எண் மதிப்பு புள்ளி சார்பு எனில், $curl(grad\ \phi)$ -ஐக் காண்க.

6. Find $\nabla(r^2)$.

$\nabla(r^2)$ ன் மதிப்பு காண்.

7. Evaluate $\int_C \overline{r} \cdot d\overline{r}$ where C is the line $y = x$ in the xy plane from (1, 1) to (2, 2).

C என்பது $y = x$ என்ற கோட்டில் (1, 1) மற்றும் (2, 2) இடத்து $\int_C \overline{r} \cdot d\overline{r}$ ஐ காண்க.

8. Define surface integral.

சமதள தொகைக்கெழு வரையறு.

9. State Green's theorem.

க்ரீன்ஸ் தேற்றத்தை கூறுக.

10. Using Gauss divergence theorem prove that $\iint_S \overline{r} \cdot d\overline{s} = 3V$ where $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

காஸ்சியன் பாய்வுத் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி நிறுவுக $\iint_S \overline{r} \cdot d\overline{s} = 3V$ where $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Find the directional derivative of $\phi = 4xz^2 + x^2yz$ at $(1, -2, 1)$ in the direction of $2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$.

$(1, -2, 1)$ல் $2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ என்ற திசையில் $\phi = 4xz^2 + x^2yz$ ன் திசை வகைக்கெழு-ஐ காண்க.

Or

(b) If $\nabla\phi = (2xy - z^2)\bar{i} + (x^2 + 2yz)\bar{j} + (y^2 - 2xz)\bar{k}$, find ϕ.

$\nabla\phi = (2xy - z^2)\bar{i} + (x^2 + 2yz)\bar{j} + (y^2 - 2xz)\bar{k}$ எனில் ϕ ஐ காண்க.

12. (a) Find the constant a, b, c so that

$$\bar{F} = (x + 2y + az)\bar{i} + (bx - 3y - z)\bar{j} + (4x + cy + 2z)\bar{k}$$

is irrotional.

$$\bar{F} = (x + 2y + az)\bar{i} + (bx - 3y - z)\bar{j} + (4x + cy + 2z)\bar{k}$$

என்பது சுழலற்ற வெக்டர் எனில் a, b, c ன் மதிப்பு காண்.

Or

(b) If $\bar{a}$ is a constant vector and $\bar{r}$ is the position vector of the point (x, y, z) with respect to the origin, prove that

(i) $div(\bar{a} \times \bar{r}) = 0$

(ii) $curl(\bar{a} \times \bar{r}) = 0$.

(x, y, z) என்ற மைய புள்ளியிடத்து $\bar{a}$ என்பது மாறிலி வெக்டர் $\bar{r}$ என்பது நிலைத் திசை வெக்டர் எனில்

(i) $div(\bar{a} \times \bar{r}) = 0$ என்றும்

(ii) $curl(\bar{a} \times \bar{r}) = 0$ என்றும் நிறுவுக.

13. (a) If $\bar{F}$ is a vector point function then prove that $div(curl\,\bar{F}) = 0$.

$\bar{F}$ என்பது வெக்டர் புள்ளி சார்பு எனில் $div(curl\,\bar{F}) = 0$ என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that $div(\nabla\phi + \nabla\psi) = 0$

$div(\nabla\phi + \nabla\psi) = 0$ என தருவி.

14. (a) If $\overline{F} = (3x^2 + 6y)\overline{i} - 14yz\overline{j} + 20xz^2\overline{k}$, calculate $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ from (0, 0, 0) to (1, 1, 1) along the path C is given by $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

$\overline{F} = (3x^2 + 6y)\overline{i} - 14yz\overline{j} + 20xz^2\overline{k}$ எனில் $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ என்ற வளைவரையில் (0, 0, 0) மற்றும் (1, 1, 1) புள்ளியிடத்து $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ ன் மதிப்பை காண்க.

Or

(b) Evaluate $\iiint_V \nabla \cdot \overline{F}\, dV$ where V $\overline{F} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ is the volume enclosed by the cube $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ ஆள் மூடிய கண சதுரம் V ஆகும். மற்றும் $\overline{F} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ எனில் $\iiint_V \nabla \cdot \overline{F}\, dV$ ஐ மதிப்பிடுக.

15. (a) Evaluate $\oint_C y(2xy - 1)\,dx + x(2xy + 1)\,dy$ where C is the circle $x^2 + y^2 = 4$ using Green's theorem.

க்ரீன்ஸ் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $x^2 + y^2 = 4$ என்ற வட்டத்திற்குட்பட்டு $\oint_C y(2xy - 1)\,dx + x(2xy + 1)\,dy$ ன் மதிப்பு காண்.

Or

(b) Use divergence theorem to evaluate $\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n}\, ds$ where $\overline{F} = x^3 i + y^3 j + z^3 k$ and S in the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ என்ற கோளத்தின் மேற்பரப்பு மற்றும் $\overline{F} = x^3 i + y^3 j + z^3 k$ எனில் பாய்வு தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n}\, ds$ ஐ காண்க.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If $\overline{r}$ is a position vector of the point (x, y, z) $\overline{a}$ is a constant vector and $\phi = x^2 + y^2 + z^2$ prove that

(a) $grad(\overline{r} \cdot \overline{a}) = \overline{a}$

(b) $\overline{r} \cdot grad\, \phi = 2\phi$.

$\phi = x^2 + y^2 + z^2$, $\overline{a}$ is மாறிலி வெக்டர், $\overline{r}$ என்பது (x, y, z) புள்ளியிடத்து நிலைத் திசை வெக்டர் எனில்

(அ) $grad(\overline{r} \cdot \overline{a}) = \overline{a}$

(ஆ) $\overline{r} \cdot grad\, \phi = 2\phi$ என்றும் காட்டு.

17. Find the values of the constant a, b, c so that $\overline{F} = (axy + bz^3)i + (3x^2 - (z))\overline{j} + (3xz^2 - y)\overline{k}$ may be irrotational for the values of a, b, c find the scalar potential of $\overline{F}$.

$\overline{F} = (axy + bz^3)i + (3x^2 - (z))\overline{j} + (3xz^2 - y)\overline{k}$ என்பது சுழலற்ற வெக்டாராக இருக்கும் பட்சத்தில் a, b, c ன் மதிப்பை காண்க. மேலும் $\overline{F}$ -ன் ஸ்கேலார் பொட்டன்ஷியலை மதிப்பிடுக.

18. Prove that $div(grad\, r^n) = \nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$ where $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ and hence deduce that $\frac{1}{r}$ satisfies Laplace equation.

$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ எனில்

$div(grad\, r^n) = \nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$ என தருவி.

மேலும் $\frac{1}{r}$ ஆனது லாப்லாஸ் சமன்பாட்டை தரும் எனக் காட்டு.

19. Evaluate $\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n}\, ds$ if $\overline{F} = (x + y^2)\overline{i} - 2x\overline{j} + 2yz\overline{k}$ and S is the surface of the plane $2x + y + 2z = 6$ in the first octant.

S என்பது தளத்தின் மேற்பரப்பின் ஒரு பகுதியானது முதல், அரைக்கால் பகுதி எனில் $\overline{F} = (x + y^2)\overline{i} - 2x\overline{j} + 2yz\overline{k}$ எனில் $\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n}\, ds$ ஐ காண்க.

20. Verify Gauss divergence theorem for $\overline{F} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ where S is the surface of the cuboid formed by the planes $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ and $z = c$.

$x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ மற்றும் $z = c$ என்ற சமதளத்தின் S என்பது கனச் செவ்வகத்தின் மேற்பரப்பு எனில் $\overline{F} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$ ஐ பொருத்து பாய்வு தேற்றத்தை சரிபார்க்க.
