(8 pages)

S.No. 1981 **12UMA11**

(For the candidates admitted from 2012–2013 onwards)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, NOVEMBER 2017.

Sixth Semester

Mathematics

REAL ANALYSIS – II

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.

1. If $A=[0,1]$, then which of the following sets are open in A?

   (a) $(1/2, 1]$

   (b) $(1/2, 1)$

   (c) $[1/2, 1)$.

   $A=[0,1]$ எனில் பின்வருவனவற்றுள் எவை A – ல் திறந்த கணங்கள்?

   (அ) $(1/2, 1]$

   (ஆ) $(1/2, 1)$

   (இ) $[1/2, 1)$.

2. If A_1, A_2 are connected subsets of a metric space and if $A_1 \cap A_2 = \varphi$, then prove that $A_1 \cup A_2$ is also connected.

   ஒரு மெட்ரிக் வெளியில் A_1, A_2 என்பன தொடுத்த கணங்கள் மற்றும் $A_1 \cap A_2 = \varphi$ எனில் $A_1 \cup A_2$ –ம் ஒரு தொடுத்த கணமே என நிரூபி.

3. When a metric space is said to be compact?

   ஒரு மெட்ரிக் வெளி எப்போது கச்சிதமானது என்போம்?

4. Prove that a real-valued continuous function on the closed and bounded interval $[a,b]$ is uniformly continuous on $[a,b]$.

   $[a,b]$ என்ற மூடிய வரம்புடைய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடைய ஒரு மெய் மதிப்பு சார்பானது $[a,b]$–ன் மீது சீரான தொடர்ச்சியுடைது என நிரூபி.

5. For each $n \in I$ if $\sigma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$ is a partition of $[0, 1]$, then compute $\lim\limits_{n\to\infty} L[f;\sigma_n]$ for the function $f(x) = x, 0 \le x \le 1$.

   ஒவ்வொரு $n \in I$ க்கும் $\sigma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$ என்பது $[0, 1]$ ன் ஒரு பங்கீடு எனில் $f(x) = x, 0 \le x \le 1$ என்ற சார்புக்கு $\lim\limits_{n\to\infty} L[f;\sigma_n]$ ஐக் கணக்கிடுக.

6. If $f(x) = \sin x^2$, then find $f'(x)$ by chain rule.

சங்கிலி விதியைப் பயன்பத்தி $f(x) = \sin x^2$ ன் வகையீடு $f'(x)$ ஐக் காண்க.

7. Show that the function $f(x) = \sqrt{x(x-1)}, 0 \le x \le 1$ obeys the hypotheses of Rolle's theorem.

$0 \le x \le 1$ ல் $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$ என்ற சார்பு ரோலின் தேற்றத்தின் எடுகோள்களை நிவர்த்தி செய்யும் எனக்காட்டுக.

8. Show that the integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ converges.

$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx$ என்ற தொகையீடு ஒருங்கும் எனக்காட்டு.

9. Define uniform convergence of sequence of functions.

சார்புகளாலான தொடர் முறையின் சீரான ஒருங்கலை வரையறு.

10. Show that the series $\sum_1^\infty x^n, 0 < x < 1$, converges to $1/(1-x)$.

$0 < x < 1$ எனில் $\sum_1^\infty x^n$ என்ற தொடர் $1/(1-x)$ க்கு ஒருங்கும் எனக்காட்டு.

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) If f is a continuous function from a connected metric space M_1 into a metric space M_2, then prove that the range $f(M_1)$ of f is also connected.

M_1 என்ற தொடுத்த யாப்பு வெளியிலிருந்து M_2 என்ற யாப்பு வெளிக்கு f, என்ற சார்பு தொடர்ச்சியுடையது எனில் f – ன் பிம்பம் $f(M_1)$ ஆனதும் தொடுத்தது என நிரூபி.

Or

(b) State and prove nested interval theorem.

ஒன்றுக்குள் ஒன்றான இடைவெளி தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.

12. (a) Show that the function $g(x) = x^2, (-\infty < x < \infty)$ is not uniformly continuous.

$g(x) = x^2, (-\infty < x < \infty)$ என்ற சார்பு சீரான தொடர்ச்சியற்றது எனக்காட்டு.

Or

(b) If f is a continuous function from a compact metric space M_1 into a metric space M_2, then prove that the range $f(M_1)$ of f is also compact.

f, என்பது M_1 என்ற கச்சித யாப்பு வெளியிலிருந்து M_2 என்ற யாப்பு வெளிக்கு தொடர்ச்சியுடைய சார்பு எனில் f ன் பிம்பம் $f(M_1)$– ம் கச்சிதமானது என நிரூபி.

13. (a) If each of the subsets $E_1, E_2 \ldots$ of R^1 is of measure zero, then prove that $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ is also of measure zero and hence deduce that every countable subset of R^1 has measure zero.

R^1 ல், $E_1, E_2 \ldots$ என்ற ஒவ்வொரு உட்கணமும் பூச்சிய அளவுடையன எனில் $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$– ம் பூச்சிய அளவுடையது என்று நிரூபி. இதிலிருந்து R^1– ன் ஒவ்வொரு எண்ணிடத்தக்க கணமும் பூச்சிய அளவுடையது எனக் கொணர்க.

Or

(b) If $f \in R[a,b]$, then for any real number λ prove that $\lambda f \in R[a,b]$ and $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

$f \in R[a,b]$ எனில் எந்த ஒரு மெய்யெண் λ –க்கும் $\lambda f \in R[a,b]$ மற்றும் $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$ என நிரூபி.

14. (a) State and prove the law of the mean.

சராசரி விதியைக் கூறி நிரூபி.

Or

(b) Prove that the improper integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ diverges.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ என்ற தகா தொகையீடு விரியும் என நிரூபி.

15. (a) State and prove Cauchy criterion for uniform convergence of sequence of functions.

சார்புகளாலான தொடர்முறைகளின் சீரான ஒருங்களுக்கான கோஷியின் வரன்முறையைக் கூறி நிரூபி.

Or

(b) Let $\{fn\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of real-valued functions on a metric space M which converges uniformly to the function f on M. If each $f_n, n \in I$, is continuous at $a \in M$, then prove that f is also continuous at a.

$\{fn\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது M என்ற யாப்பு வெளியில் மெய் மதிப்புச் சார்புகளாலான தொடர்முறையானது M –ன் மீது f என்ற சார்புக்கு சீராக ஒருங்கும் என்க. $n \in I$ எனில் ஒவ்வொரு f_n – ம் $a \in M$ இடத்து தொடர்ச்சியுடையது. எனில் f – ம் a– இடத்து தொடர்ச்சி உடையது என நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Show that l^2 is a complete metric space.

l^2 – ஒரு முழுமை யாப்பு வெளி எனக்காட்டு.

17. If M is a compact metric space, then prove that M has the Heine-Borel property.

M என்பது ஒரு கச்சிதமான யாப்பு வெளி எனில் M – ஆனது ஹெயின் – போரல் பண்பைப் பெற்றிருக்கும் என நிரூபி.

18. State and prove chain rule on derivatives.

வகையிடலில் சங்கிலி விதியைக் கூறி நிரூபி.

19. Show that the improper integral $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converges conditionally.

$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ என்ற தகா தொகையீடு நிபந்தனை ஒருங்கலுடையது எனக்காட்டு.

20. State and prove Dini's theorem on uniform convergence of sequence of functions.

சார்புகளாலான தொடர் முறையின் சீரான ஒருங்கலுக்கான டினியின் தேற்றத்தைக் கூறி நிரூபி.