(7 pages)

S.No. 1607 **08UMAA02**

(For the candidates admitted from 2008-2009 onwards)

B.C.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION,
NOVEMBER 2017.

Second/Fourth Semester

Allied – INTEGRAL CALCULUS, FOURIER SERIES AND VECTOR CALCULUS

(Common for Physics/Chemistry/Computer Science/B.C.A./Electronics/Information Science)

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Evaluate $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\, dx$.

   மதிப்பிடுக $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\, dx$

2. Evaluate $\int \sin^{-1}(x)\, dx$.

   மதிப்பிடுக $\int \sin^{-1}(x)\, dx$.

3. State the Dirichlet condition.

   டிரிக்லெட் நிபந்தனைகளை கூறுக.

4. If $f(x) = \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right); -\pi < x < \pi$ find a_0.

   $-\pi < x < \pi$ –ல் $f(x) = \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)$ எனில் a_0 ஐக் காண்க.

5. Define Gradient of a scalar point function.

   Gradient–யின் ஸ்கேலார் புள்ளி சார்பை வரையறு.

6. If ϕ and ψ are Scalar point function then prove that $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$.

   ϕ மற்றும் ψ என்பன ஸ்கேலார் புள்ளி சார்பு எனில் $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$ என நிறுவுக.

7. Prove that $div\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = 2/r$;

   $div\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = 2/r$ என நிறுவுக.

8. Prove that $div(\vec{A} \times \vec{r}) = 0$ where $\vec{A}$ is a constant vector.

   இங்கு $\vec{A}$ என்பது மாறிலி வெக்டர் எனில் $div(\vec{A} \times \vec{r}) = 0$ என நிறுவுக.

9. State the Gauss's theorem.

காஸிஸ் தேற்றத்தை கூறுக.

10. Evaluate $\int_s \left(ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}\right)\vec{n}\,ds$ where S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

மதிப்பிடுக $\int_s \left(ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}\right)\vec{n}\,ds$ இங்கு S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ என்ற கோளத்தின் பகுதி.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Prove that $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan\theta)\,d\theta$.

$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan\theta)\,d\theta$ என நிறுவுக.

Or

(b) Evaluate $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}\,dx$.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x}\,dx$

12. (a) Find a fourier series expression for $f(x) = e^x$ in $-\pi \le x \le \pi$.

$f(x) = e^x$ யின் பூரியர் தொடரை $-\pi \le x \le \pi$ என்ற இடைவெளியில் காண்க.

Or

(b) Find a sine Fourier series for $f(x) = \cos x$ in $0 < x < \pi$.

$0 < x < \pi$–ல் $f(x) = \cos x$ எனில் சைன் புரியர் தொடரைக் காண்க.

13. (a) Show that the surface $5x^2 - 2y - 9x = 0$ and a are orthogonal at $(1, -1, -2)$.

$5x^2 - 2y - 9x = 0$ மற்றும் $4x^2 + y + z^3 = 0$ என்ற தளங்கள் $(1, -1, -2)$ என்ற புள்ளியில் செங்குத்தானவை என நிறுவுக.

Or

(b) Find ϕ If $\nabla\phi = \left(6xy + z^3\right)\hat{i} + \left(3x^2 - z\right)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$

$\nabla\phi = \left(6xy + z^3\right)\hat{i} + \left(3x^2 - z\right)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$ எனில் ϕ ஐக் காண்க.

14. (a) If $\vec{F} = xz^3\hat{i} - 2xyz\hat{j} + xz\hat{k}$ find $div\,\vec{F}$ and $\text{curl}\,\vec{F}$ at (1,2,0).

$\vec{F} = (xz^3\hat{i} - 2xyz\hat{j} + xz\hat{k})$ எனில் (1,2,0) என்ற புள்ளியில் $div\,\vec{F}$ மற்றும் $\text{curl}\,\vec{F}$ ஐக் காண்க.

Or

(b) Show that $\vec{F} = (y^2 - z^2 + 3yz - 2x)\hat{i} + (3xz + 2xy)\hat{j} + (3xy - 2xz + 2k)\hat{k}$ is irrational and solenoidal.

$\vec{F} = (y^2 - z^2 + 3yz - 2x)\hat{i} + (3xz + 2xy)\hat{j} + (3xy - 2xz + 2k)\hat{k}$ ஐயை சுழற்றியற்றது மற்றும் பாய்வற்றது என காண்பி.

15. (a) Find $\int_c (xy - x^2)dx + x^2y\,dy$ over the triangle bounded by the lines $y = 0$, $x = 1$, $y = x$ and verify Green's theorem.

$y = 0$, $x = 1$, $y = x$ என்ற கோடுகளுக்கு இடையில் அடைப்படும் பகுதி எனில் $\int_c (xy - x^2)dx + x^2y\,dy$ ஐக் காண்க மற்றும் கீரின்ஸ் தேற்றத்தைச் சரிபார்.

Or

(b) Verify stoke's theorem when $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ and surface S is the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ along the xy plane.

இங்கு $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ மற்றும் S என்பது $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ என்ற கோளத்தின் மீது xy தளத்தின் ஒரு பகுதி எனில் ஸ்டோக்கின் தேற்றத்தை சரிபார்க்கவும்.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Evaluate $\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$.

மதிப்பிடுக : $\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$.

17. Find the Fourier series for the function $f(x) = x^2$ in $-\pi < x < \pi$ and hence show that $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \infty = \frac{\pi^2}{6}$.

$-\pi < x < \pi$ –ல் $f(x) = x^2$ யின் புரியர் தொடரைக் காண்க மற்றும் $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \infty = \frac{\pi^2}{6}$ என நிறுவுக.

18. If $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ then prove that $\nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$ and also prove that $\nabla^2(1/r) = 0$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ எனில் $\nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$ மற்றும் $\nabla^2(1/r) = 0$ எனவும் நிறுவுக.

19. Show that $\nabla^2 f(r) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}$.

$\nabla^2 f(r) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr}$ என நிறுவுக.

20. Verify Green's theorem in the plane $\int_c \left[\left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(x^3 y + 1\right)dy\right]$ where C is the boundary given by $y^2 = 8x$ and $x = 2$.

$y^2 = 8x$ மற்றும் $x = 2$ என்ற C பகுதியில் $\int_c \left[\left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(x^3 y + 1\right)dy\right]$ இவற்றை கிரீன்ஸ் தேற்றத்தில் சரிபார்க்கவும்.